

Metody matematyczne astronomii 2

Wykład 5

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

MMA 2 ©2026



Regresja do danych

Do danych $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ dopasowujemy funkcję $f(x; \vec{a})$, gdzie $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ jest wektorem p parametrów. Np. metodą najmniejszych kwadratów, tj. minimalizujemy

$$\chi^2(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f(x_i; \vec{a})}{\Delta y_i} \right)^2$$

jeśli z każdym y_i jest powiązana niepewność Δy_i .

Regresja do danych

Do danych $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ dopasowujemy funkcję $f(x; \vec{a})$, gdzie $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ jest wektorem p parametrów. Np. metodą najmniejszych kwadratów, tj. minimalizujemy

$$\chi^2(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f(x_i; \vec{a})}{\Delta y_i} \right)^2$$

jeśli z każdym y_i jest powiązana niepewność Δy_i .

Z dopasowania dostajemy też macierz kowariancji parametrów $\vec{a}$:

$$C = \begin{pmatrix} \text{Var}(a_1) & \text{Cov}(a_1, a_2) & \dots & \text{Cov}(a_1, a_p) \\ \text{Cov}(a_2, a_1) & \text{Var}(a_2) & \dots & \text{Cov}(a_2, a_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(a_p, a_1) & \text{Cov}(a_p, a_2) & \dots & \text{Var}(a_p) \end{pmatrix}$$

Regresja do danych

Do danych $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ dopasowujemy funkcję $f(x; \vec{a})$, gdzie $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ jest wektorem p parametrów. Np. metodą najmniejszych kwadratów, tj. minimalizujemy

$$\chi^2(\vec{a}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f(x_i; \vec{a})}{\Delta y_i} \right)^2$$

jeśli z każdym y_i jest powiązana niepewność Δy_i .

Z dopasowania dostajemy też macierz kowariancji parametrów $\vec{a}$:

$$C = \begin{pmatrix} \text{Var}(a_1) & \text{Cov}(a_1, a_2) & \dots & \text{Cov}(a_1, a_p) \\ \text{Cov}(a_2, a_1) & \text{Var}(a_2) & \dots & \text{Cov}(a_2, a_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(a_p, a_1) & \text{Cov}(a_p, a_2) & \dots & \text{Var}(a_p) \end{pmatrix}$$

Przy uzasadnionym oczekiwaniu, że $\text{Cov}(a_i, a_j) \approx 0$, niepewności poszczególnych parametrów to

$$\Delta a_i = \sigma(a_i) = \sqrt{\text{Var}(a_i)}$$

Regresja do danych

Macierz kowariancji **parametrów**, C , uzyskuje się numerycznie jako (w lokalnym przybliżeniu liniowym)

$$C \approx (J^T W J)^{-1}$$

Regresja do danych

Macierz kowariancji **parametrów**, C , uzyskuje się numerycznie jako (w lokalnym przybliżeniu liniowym)

$$C \approx (J^T W J)^{-1}$$

gdzie macierz Jacobiego (wymiaru $n \times p$)

$$J_{ij} = \frac{\partial f(x_i; \vec{a})}{\partial a_j}$$

oraz macierz wag $W = \Sigma^{-1}$, gdzie Σ to macierz kowariancji **danych** to

$$\Sigma = \text{diag}(\Delta y_1^2, \Delta y_2^2, \dots, \Delta y_n^2)$$

Regresja do danych

Macierz kowariancji **parametrów**, C , uzyskuje się numerycznie jako (w lokalnym przybliżeniu liniowym)

$$C \approx (J^T W J)^{-1}$$

gdzie macierz Jacobiego (wymiaru $n \times p$)

$$J_{ij} = \frac{\partial f(x_i; \vec{a})}{\partial a_j}$$

oraz macierz wag $W = \Sigma^{-1}$, gdzie z kolei macierz kowariancji **danych** to

$$\Sigma = \text{diag}(\Delta y_1^2, \Delta y_2^2, \dots, \Delta y_n^2)$$

Stwierdzenie, czy dane kowariancje parametrów, C_{ij} , są małe jest zależne od modelu i danych—dobrze jest znormalizować, tj. zbudować macierz korelacji ρ :

$$\rho_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}}$$

dla której $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$. Jeśli $|\rho_{ij}| \ll 1$, to korelacje/kowariancje między parametrami $\vec{a}$ są dostatecznie małe.

```

1 import numpy as np
2 from scipy import optimize
3
4 data = # let's assume it's three columns
5 x_data = np.array(data[:,0])
6 y_data = np.array(data[:,1])
7 y_error = np.array(data[:,2])
8
9 params, params_covariance = optimize.curve_fit(model,
10         x_data, y_data, p0=[initial values], sigma=y_error,
11         absolute_sigma=True)
12
13 params_errors = []
14 for i in range(len(params)):
15     params_errors.append(np.absolute(params_covariance[i][i]
16         ))**0.5)

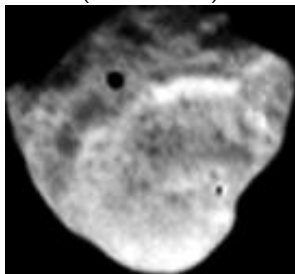
```

Kilka praktycznych przykładów

- Krzywe fazowe planetoid/Hyperiona
- Mikrosoczewkowanie — model Paczyńskiego
- Krzywe blasku SN Ia

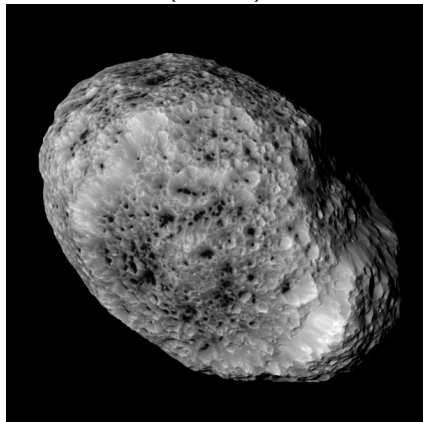
Hyperion

Voyager 2 (1981)
(431,370 km)



- Odkrycie w 1848 r. (Bond, Lassell)
- $r_{\text{orb}} = 1.4296 \cdot 10^6 \text{ km}$
- $\bar{e} = 0.1$
- $T = 21.28 \text{ d}$
- rezonans orb. 4:3 z Tytanem
- $360 \times 266 \times 205 \text{ km}$
- $\rho = 0.54 \text{ g cm}^{-3}$
- albedo $\simeq 0.2\text{--}0.3$

Cassini (2015)
(505 km)



Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Date	Day ^a	Phase ^b	r ^c	Δ ^d	N ^e	R Mag ^f
06/01	152.4	0.90	10.028	9.023	2	14.107 ± 0.016
06/03	154.4	0.70	10.028	9.020	6	14.360 ± 0.014
06/08	159.3	0.15	10.028	9.014	3	13.952 ± 0.019
06/09	160.2	0.03	10.028	9.014	9	13.826 ± 0.006
06/10	161.3	0.10	10.028	9.014	7	14.101 ± 0.042
06/11	162.4	0.23	10.028	9.014	6	14.124 ± 0.021
06/13	164.4	0.48	10.028	9.016	6	14.046 ± 0.083
06/14	165.3	0.60	10.029	9.017	9	14.095 ± 0.025
06/15	166.2	0.70	10.029	9.019	8	14.151 ± 0.006
06/16	167.2	0.80	10.029	9.021	12	14.131 ± 0.016
06/17	168.4	0.90	10.029	9.023	7	14.419 ± 0.009
06/18	169.2	1.00	10.029	9.025	11	14.431 ± 0.005
06/19	170.3	1.13	10.029	9.028	10	14.445 ± 0.006
06/21	172.4	1.38	10.029	9.035	7	14.146 ± 0.003
06/22	173.4	1.50	10.029	9.038	7	14.236 ± 0.006
06/23	174.4	1.60	10.029	9.042	9	14.216 ± 0.006
06/24	175.2	1.70	10.029	9.046	3	14.355 ± 0.022
06/29	180.2	2.28	10.030	9.072	5	14.315 ± 0.016
06/30	181.2	2.40	10.030	9.077	6	14.261 ± 0.005
07/02	183.3	2.60	10.030	9.089	7	14.568 ± 0.008
07/03	184.3	2.70	10.030	9.098	9	14.733 ± 0.011
07/04	185.3	2.80	10.030	9.102	6	14.490 ± 0.010
07/05	186.2	2.90	10.030	9.112	17	14.405 ± 0.005
07/06	187.2	3.00	10.030	9.119	7	14.560 ± 0.022
07/07	188.3	3.10	10.030	9.127	11	14.491 ± 0.004
07/08	189.2	3.20	10.030	9.136	16	14.559 ± 0.025
07/09	190.2	3.30	10.030	9.144	9	14.691 ± 0.016
07/11	192.2	3.50	10.030	9.161	20	14.312 ± 0.007
07/12	193.3	3.60	10.030	9.170	6	14.385 ± 0.016
07/13	194.2	3.70	10.030	9.179	11	14.485 ± 0.007
07/14	195.2	3.80	10.031	9.189	13	14.485 ± 0.006
07/17	198.2	4.08	10.031	9.219	7	14.430 ± 0.007
07/19	200.2	4.23	10.031	9.240	7	14.514 ± 0.004
07/21	202.2	4.38	10.031	9.262	15	14.587 ± 0.005
07/22	203.2	4.45	10.031	9.273	3	14.567 ± 0.006
07/23	204.2	4.53	10.031	9.284	11	14.414 ± 0.004
07/24	205.2	4.60	10.031	9.297	8	14.343 ± 0.022
08/04	216.2	5.43	10.032	9.438	6	14.572 ± 0.017

^a Day number after January 0, 1987.

^b Solar phase angle in degrees.

^c Heliocentric distance (AU).

^d Geocentric distance (AU).

^e Total number of independent Hyperion observations.

^f Measured Johnson R Magnitude (nightly mean).

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Poprawka geometryczna na średnią odległość w opozycji:

$$R' = R - 5 \log \frac{r \Delta}{r_S \Delta_S} \quad (1)$$

gdzie $r_S = 9.54$ AU—średnia odległość heliocentryczna Saturna,
 $\Delta_S = 8.54$ AU—średnia odległość geocentryczna Saturna.¹

¹Klavetter, AJ 97, 570 (1989)

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Poprawka geometryczna na średnią odległość w opozycji:

$$R' = R - 5 \log \frac{r\Delta}{r_S\Delta_S} \quad (1)$$

gdzie $r_S = 9.54$ AU—średnia odległość heliocentryczna Saturna,
 $\Delta_S = 8.54$ AU—średnia odległość geocentryczna Saturna.¹

Aby przeskalować do układu znormalizowanego, w którym odległości geocentryczna i heliocentryczna są równe 1 AU należy przyjąć:

$$R'_{1AU} = R - 5 \log \frac{r\Delta}{1 \text{ AU}^2} \quad (2)$$

Równ. (1) i (2) różnią się o stały czynnik $5 \log(r_S\Delta_S/1 \text{ AU}^2)$ —kształty krzywych zmian blasku R' i R'_{1AU} pozostają takie same.

¹Klavetter, AJ 97, 570 (1989)

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Biorąc pod uwagę kąt fazowy Słońca poprzez empiryczny model HG :

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)] \quad (3)$$

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Biorąc pod uwagę kąt fazowy Słońca poprzez empiryczny model HG :

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)] \quad (3)$$

gdzie

$$\Phi_i = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right] \quad (4)$$

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Biorąc pod uwagę kąt fazowy Słońca poprzez empiryczny model HG :

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)] \quad (3)$$

gdzie

$$\Phi_i = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right] \quad (4)$$

gdzie z kolei $A_1 = 3.331$, $B_1 = 0.628$, $A_2 = 1.866$, $B_2 = 1.217$.

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Biorąc pod uwagę kąt fazowy Słońca poprzez empiryczny model HG :

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)] \quad (3)$$

gdzie

$$\Phi_i = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right] \quad (4)$$

gdzie z kolei $A_1 = 3.331$, $B_1 = 0.628$, $A_2 = 1.866$, $B_2 = 1.217$.

Następnie odejmuje się $R'(\alpha)$ od R'_{1AU} uzyskując krzywą zmian blasku w „znormalizowanym układzie odniesienia” Hyperiona—to pozwala np. zbadać jego rotację, ponieważ wtedy zmiany jasności są już tylko powodowane odbiciem światła od powierzchni ciała z perspektywy ustalonego punktu, który nie zmienia swego „położenia” (średnia odległość do Saturna) ani „nasłonecznienia”. Skorzystanie z równ. (1) prowadzi do takiej samej interpretacji, tyle że obliczone jasności odnoszą się do przeciętnej odległości Hyperiona od Ziemi.

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Biorąc pod uwagę kąt fazowy Słońca poprzez empiryczny model HG :

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)] \quad (3)$$

gdzie

$$\Phi_i = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right] \quad (4)$$

gdzie z kolei $A_1 = 3.331$, $B_1 = 0.628$, $A_2 = 1.866$, $B_2 = 1.217$.

Następnie odejmuje się $R'(\alpha)$ od R'_{1AU} uzyskując krzywą zmian blasku w „znormalizowanym układzie odniesienia” Hyperiona—to pozwala np. zbadać jego rotację, ponieważ wtedy zmiany jasności są już tylko powodowane odbiciem światła od powierzchni ciała z perspektywy ustalonego punktu, który nie zmienia swego „położenia” (średnia odległość do Saturna) ani „nasłonecznienia”. Skorzystanie z równ. (1) prowadzi do takiej samej interpretacji, tyle że obliczone jasności odnoszą się do przeciętnej odległości Hyperiona od Ziemi. Nie bierzemy pod uwagę ruchu orbitalnego Hyperiona wokół Saturna—jest to zanedbywalnie mała poprawka, mniejsza niż niepewności pochodzące z innych źródeł/efektów.

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)]$$

$$\Phi_i = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right]$$

- H to zredukowana wielkość gwiazdowa, tj. przy $\alpha = 0$, w układzie, w którym odległości geo- i heliocentryczna wynoszą 1 AU; zależy zarówno od albedo, jak i średnicy obiektu D , ale odzwierciedla ich łączny wkład w dopasowaną wartość H
- G to parametr kształtu krzywej fazowej (opisuje własności powierzchni odbijającej światło)
- Φ_i to empiryczne tzw. funkcje tłumienia opisujące jak jasność spada wraz z kątem α
- A_i, B_i to parametry empiryczne, uzyskane z dopasowania do różnych klas obiektów

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)]$$

$$\Phi_i = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right]$$

- H to zredukowana wielkość gwiazdowa, tj. przy $\alpha = 0$, w układzie, w którym odległości geo- i heliocentryczna wynoszą 1 AU; zależy zarówno od albedo, jak i średnicy obiektu D , ale odzwierciedla ich łączny wkład w dopasowaną wartość H
- G to parametr kształtu krzywej fazowej (opisuje własności powierzchni odbijającej światło)
- Φ_i to empiryczne tzw. funkcje tłumienia opisujące jak jasność spada wraz z kątem α
- A_i, B_i to parametry empiryczne, uzyskane z dopasowania do różnych klas obiektów

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)]$$

$$\Phi_i = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right]$$

- H to zredukowana wielkość gwiazdowa, tj. przy $\alpha = 0$, w układzie, w którym odległości geo- i heliocentryczna wynoszą 1 AU; zależy zarówno od albedo, jak i średnicy obiektu D , ale odzwierciedla ich łączny wkład w dopasowaną wartość H
- G to parametr kształtu krzywej fazowej (opisuje własności powierzchni odbijającej światło)
- Φ_i to empiryczne tzw. funkcje tłumienia opisujące jak jasność spada wraz z kątem α
- A_i, B_i to parametry empiryczne, uzyskane z dopasowania do różnych klas obiektów

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

$$R'(\alpha) = H - 2.5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)]$$

$$\Phi_i = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right]$$

- H to zredukowana wielkość gwiazdowa, tj. przy $\alpha = 0$, w układzie, w którym odległości geo- i heliocentryczna wynoszą 1 AU; zależy zarówno od albedo, jak i średnicy obiektu D , ale odzwierciedla ich łączny wkład w dopasowaną wartość H
- G to parametr kształtu krzywej fazowej (opisuje własności powierzchni odbijającej światło)
- Φ_i to empiryczne tzw. funkcje tłumienia opisujące jak jasność spada wraz z kątem α
- A_i, B_i to parametry empiryczne, uzyskane z dopasowania do różnych klas obiektów

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Żeby obliczyć albedo skorzystamy z przybliżenia kształtu Hyperiona elipsoidą trójosiową ($D = \sqrt[3]{abc}$) oraz otrzymanej z dopasowania wartości $H \equiv H(1 \text{ AU})$ —absolutnej wielkości gwiazdowej, tyle, że w filtrze R: $H \equiv H_R$. Ale wzór na albedo geometryczne²:

$$p_V = \left(\frac{1329 \text{ km}}{D} \right)^2 10^{-0.4H_V} \quad (5)$$

jest dla filtra V.

²Harris & Harris, Icarus 126, 450 (1997)

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Żeby obliczyć albedo skorzystamy z przybliżenia kształtu Hyperiona elipsoidą trójosiową ($D = \sqrt[3]{abc}$) oraz otrzymanej z dopasowania wartości $H \equiv H(1 \text{ AU})$ —absolutnej wielkości gwiazdowej, tyle, że w filtrze R: $H \equiv H_R$. Ale wzór na albedo geometryczne²:

$$p_V = \left(\frac{1329 \text{ km}}{D} \right)^2 10^{-0.4H_V} \quad (5)$$

jest dla filtra V. Trzeba dokonać korekcji koloru:

$$H_V = H_R + (V - R) \quad (6)$$

Dla Hyperiona $(V - R) \approx 0.41$.

²Harris & Harris, *Icarus* 126, 450 (1997)

Krzywe fazowe

Na przykładzie Hyperiona

Zadanie 11

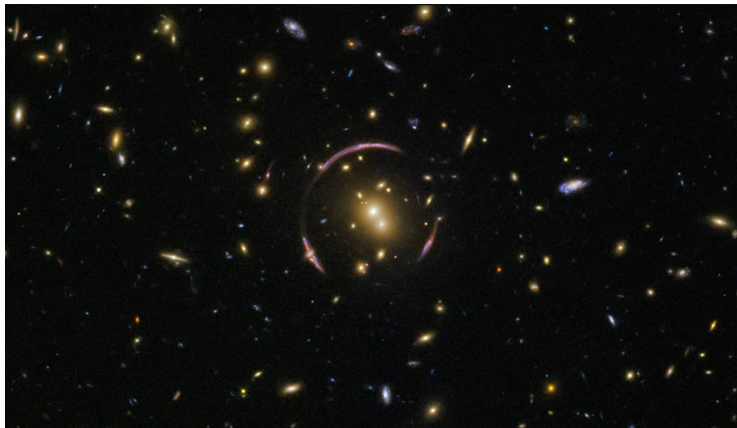
Zastosować odpowiednie poprawki i dopasować równ. (3) do danych dot. Hyperiona. Wykorzystać niepewności pomiarów jasności, R_{err} . Podać wartości H i G wraz z niepewnościami. Wykonać wykres(y) ilustrujący/e procedurę i wynik dopasowania. Porównać z literaturą.^a

Użyć stosownych wyrażeń by uzyskać albedo p_V wraz z niepewnością. Porównać z podanym przedziałem (slajd 6). Posppekulować nt. powodów, dla których długość tego przedziału nie jest zerowa.

^aKlavetter, AJ 97, 570 (1989)

Soczewkowanie grawitacyjne

Pierścień Einstein (silne soczewkowanie):



[https:](https://www.uraniania.edu.pl/wiadomosci/pierscien-einsteina-hubblea-4274.html)

[//www.uraniania.edu.pl/wiadomosci/pierscien-einsteina-hubblea-4274.html](https://www.uraniania.edu.pl/wiadomosci/pierscien-einsteina-hubblea-4274.html)

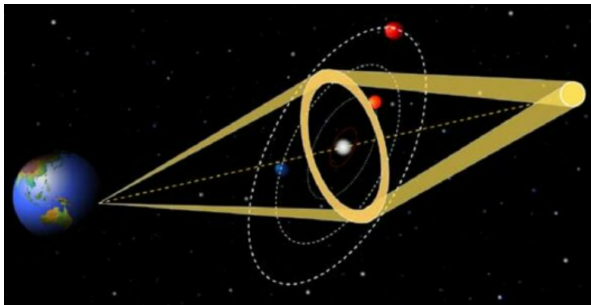
Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

Model Paczyńskiego

Promień Einsteina³ (kątowy):

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{d_S - d_L}{d_S d_L}}$$

gdzie M_L —masa soczewki (*lens*, L), d_L —odległość do soczewki, d_S —odległość do źródła (*source*, S).



³Gould, ApJ 542, 785 (2000)

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

Model Paczyńskiego

Zjawisko mikrosoczewkowania prowadzi do charakterystycznej, czasowej zmiany blasku obiektu, której skala określona jest przez czas Einsteina, t_E . Wzrost wartości strumienia $F(t) = F_0 A(t)$ przebiega w czasie zgodnie z czynnikiem⁴

$$A(t) = \frac{u(t)^2 + 2}{u(t) \sqrt{u(t)^2 + 4}} \quad (7)$$

gdzie

$$u(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{t - t_0}{t_E} \right)^2} \quad (8)$$

określa odległość kątową źródła od soczewki; u jest bezwymiarowe, wyrażone w jednostkach promienia Einsteina θ_E .

⁴Paczyński, ApJ 304, 1 (1986)

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

Model Paczyńskiego

Zjawisko mikrosoczewkowania prowadzi do charakterystycznej, czasowej zmiany blasku obiektu, której skala określona jest przez czas Einsteina, t_E . Wzrost wartości strumienia $F(t) = F_0 A(t)$ przebiega w czasie zgodnie z czynnikiem⁴

$$A(t) = \frac{u(t)^2 + 2}{u(t) \sqrt{u(t)^2 + 4}} \quad (7)$$

gdzie

$$u(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{t - t_0}{t_E} \right)^2} \quad (8)$$

określa odległość kątową źródła od soczewki; u jest bezwymiarowe, wyrażone w jednostkach promienia Einsteina θ_E .

Mikrosoczewkowanie przekłada się na wzrost obserwowanej jasności obiektu (w skali magnitudo):

$$m = m_0 - 2.5 \log_{10} A(t) \quad (9)$$

⁴Paczyński, ApJ 304, 1 (1986)

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

Model Paczyńskiego

- m_0 —jasność bazowa, tj. magnitudo źródła bez soczewkowania; związana ze strumieniem $F_0 \propto 10^{-0.4m_0}$
- u_0 —minimalna odległość kątowa (w jednostkach θ_E) między źródłem a soczewką; im mniejsze u_0 , tym większy pik jasności
- t_0 —moment maksimum, tj. chwila, w której $u(t)$ przyjmuje wartość minimalną: $u(t_0) = u_0$, oraz $A(t_0)$ jest maksimum lokalnym
- t_E —charakterystyczna skala czasu; przedział czasu, w którym $u(t)$ zmienia się o ≈ 1 (w skrócie: gdy $|t - t_0| = t_E$, to $u(t) = \sqrt{u_0^2 + 1}$, tedy zmiana u to $\sqrt{u_0^2 + 1} - u_0 \approx 1$ dla $u_0 \ll 1$, tj. dla typowego przypadku soczewkowania); innymi słowy: t_E to czas, w którym odległość kątowa zmienia się o jeden promień Einsteina θ_E ; ponadto $t_E = R_E/v_\perp$, gdzie z kolei $R_E = \theta_E d_L$ —promień Einsteina w przestrzeni fizycznej, $v_\perp$ —prędkość poprzeczna soczewki względem źródła;

t_E zależy od masy soczewki i geometrii układu:
$$t_E = \frac{\theta_E d_L}{v_\perp}$$

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

Model Paczyńskiego

- m_0 —jasność bazowa, tj. magnitudo źródła bez soczewkowania; związana ze strumieniem $F_0 \propto 10^{-0.4m_0}$
- u_0 —minimalna odległość kątowa (w jednostkach θ_E) między źródłem a soczewką; im mniejsze u_0 , tym większy pik jasności
- t_0 —moment maksimum, tj. chwila, w której $u(t)$ przyjmuje wartość minimalną: $u(t_0) = u_0$, oraz $A(t_0)$ jest maksimum lokalnym
- t_E —charakterystyczna skala czasu; przedział czasu, w którym $u(t)$ zmienia się o ≈ 1 (w skrócie: gdy $|t - t_0| = t_E$, to $u(t) = \sqrt{u_0^2 + 1}$, tedy zmiana u to $\sqrt{u_0^2 + 1} - u_0 \approx 1$ dla $u_0 \ll 1$, tj. dla typowego przypadku soczewkowania); innymi słowy: t_E to czas, w którym odległość kątowa zmienia się o jeden promień Einsteina θ_E ; ponadto $t_E = R_E/v_\perp$, gdzie z kolei $R_E = \theta_E d_L$ —promień Einsteina w przestrzeni fizycznej, $v_\perp$ —prędkość poprzeczna soczewki względem źródła;

t_E zależy od masy soczewki i geometrii układu:
$$t_E = \frac{\theta_E d_L}{v_\perp}$$

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

Model Paczyńskiego

- m_0 —jasność bazowa, tj. magnitudo źródła bez soczewkowania; związana ze strumieniem $F_0 \propto 10^{-0.4m_0}$
- u_0 —minimalna odległość kątowa (w jednostkach θ_E) między źródłem a soczewką; im mniejsze u_0 , tym większy pik jasności
- t_0 —moment maksimum, tj. chwila, w której $u(t)$ przyjmuje wartość minimalną: $u(t_0) = u_0$, oraz $A(t_0)$ jest maksimum lokalnym
- t_E —charakterystyczna skala czasu; przedział czasu, w którym $u(t)$ zmienia się o ≈ 1 (w skrócie: gdy $|t - t_0| = t_E$, to $u(t) = \sqrt{u_0^2 + 1}$, tedy zmiana u to $\sqrt{u_0^2 + 1} - u_0 \approx 1$ dla $u_0 \ll 1$, tj. dla typowego przypadku soczewkowania); innymi słowy: t_E to czas, w którym odległość kątowa zmienia się o jeden promień Einsteina θ_E ; ponadto $t_E = R_E/v_\perp$, gdzie z kolei $R_E = \theta_E d_L$ —promień Einsteina w przestrzeni fizycznej, $v_\perp$ —prędkość poprzeczna soczewki względem źródła;

t_E zależy od masy soczewki i geometrii układu:
$$t_E = \frac{\theta_E d_L}{v_\perp}$$

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

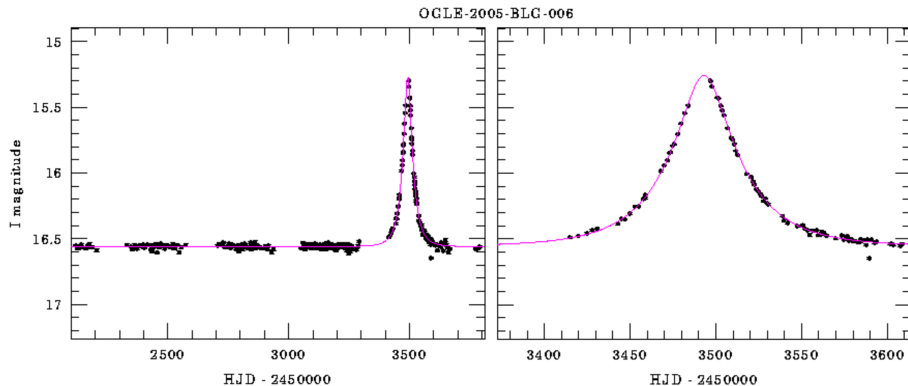
Model Paczyńskiego

- m_0 —jasność bazowa, tj. magnitudo źródła bez soczewkowania; związana ze strumieniem $F_0 \propto 10^{-0.4m_0}$
- u_0 —minimalna odległość kątowa (w jednostkach θ_E) między źródłem a soczewką; im mniejsze u_0 , tym większy pik jasności
- t_0 —moment maksimum, tj. chwila, w której $u(t)$ przyjmuje wartość minimalną: $u(t_0) = u_0$, oraz $A(t_0)$ jest maksimum lokalnym
- t_E —charakterystyczna skala czasu; przedział czasu, w którym $u(t)$ zmienia się o ≈ 1 (w skrócie: gdy $|t - t_0| = t_E$, to $u(t) = \sqrt{u_0^2 + 1}$, tedy zmiana u to $\sqrt{u_0^2 + 1} - u_0 \approx 1$ dla $u_0 \ll 1$, tj. dla typowego przypadku soczewkowania); innymi słowy: t_E to czas, w którym odległość kątowa zmienia się o jeden promień Einsteina θ_E ; ponadto $t_E = R_E/v_\perp$, gdzie z kolei $R_E = \theta_E d_L$ —promień Einsteina w przestrzeni fizycznej, $v_\perp$ —prędkość poprzeczna soczewki względem źródła;

t_E zależy od masy soczewki i geometrii układu:
$$t_E = \frac{\theta_E d_L}{v_\perp}$$

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

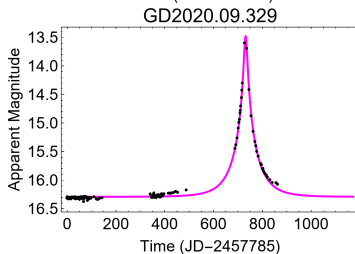
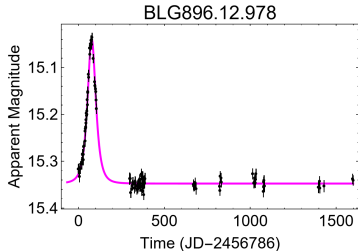
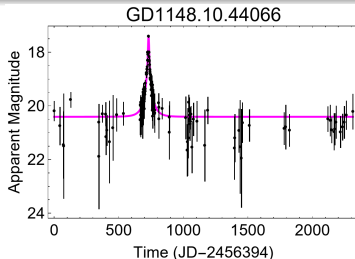
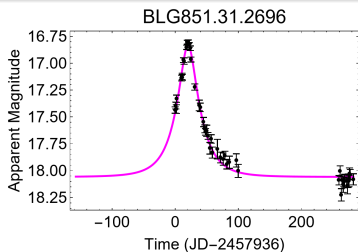
Model Paczyńskiego



<https://ogle.astrouw.edu.pl/ogle3/ews/2005/blg-006.html>

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne—galeria

Model Paczyńskiego

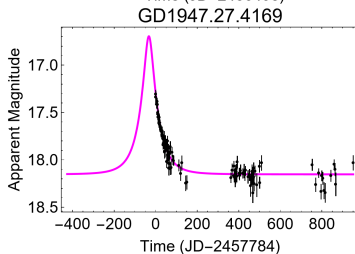
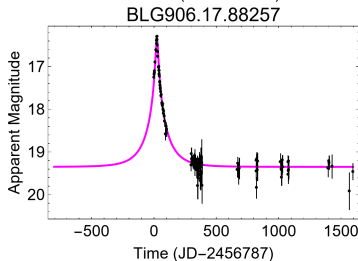
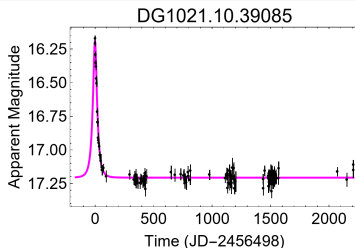
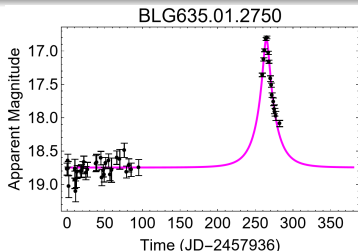


[https:](https://ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/)

[//ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/](https://ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/)

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne—galeria

Model Paczyńskiego

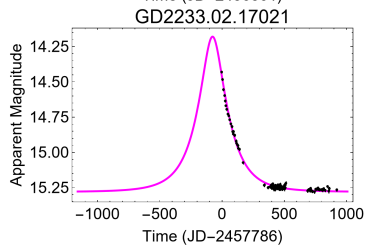
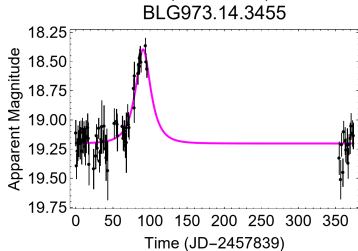
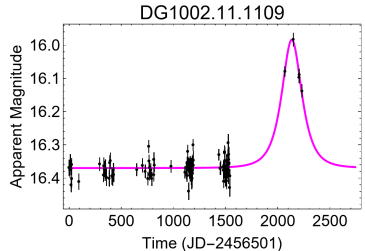
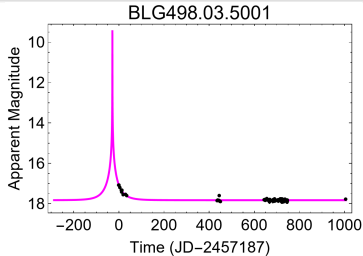


[https:](https://ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/)

[//ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/](https://ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/)

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne—galeria

Model Paczyńskiego



[https:](https://ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/)

[//ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/](https://ftp.astrow.edu.pl/ogle/ogle4/galactic_disk_microlensing/data_c/)

Zadanie 12

Dopasować wzory z równ. (7)–(9) do danych OGLE dot. soczewkowania. Podać wartości parametrów u_0 , t_0 , t_E , m_0 wraz z niepewnościami. Wykonać odpowiedni wykres ilustrujący wynik.

Wskazówka: dobrze działają następujące wartości początkowe:

- dla t_0 : średnie JD (całego zestawu danych)
- dla u_0 : 0.5
- dla t_E : $(t_{\text{end}} - t_{\text{start}})/2$
- dla m_0 : średnie magnitudo (całego zestawu danych)

Supernowe typu Ia (SN Ia)

- Brak linii widmowych wodoru i helu
- Powstają z białych karłów, gdy te—z powodu akrecji materii od towarzysza—przekraczają granicę Chandrasekhara
- Charakterystyczne krzywe zmian blasku: w maksimum linie od tlenu po wapń (z zewnętrznych powłok), później—cięższe pierwiastki (nikiel, kobalt, żelazo) z jądra
- Uniwersalny kształt krzywych zmian blasku → świece standardowe
- Każda SN Ia wybucha z takiego samego białego karła → jasność absolutna w maksimum taka sama

Supernowe typu Ia (SN Ia)

- Brak linii widmowych wodoru i helu
- Powstają z białych karłów, gdy te—z powodu akrecji materii od towarzysza—przekraczają granicę Chandrasekhara
- Charakterystyczne krzywe zmian blasku: w maksimum linie od tlenu po wapń (z zewnętrznych powłok), później—cięższe pierwiastki (nikiel, kobalt, żelazo) z jądra
- Uniwersalny kształt krzywych zmian blasku → świece standardowe
- Każda SN Ia wybucha z takiego samego białego karła → jasność absolutna w maksimum taka sama

Supernowe typu Ia (SN Ia)

- Brak linii widmowych wodoru i helu
- Powstają z białych karłów, gdy te—z powodu akrecji materii od towarzysza—przekraczają granicę Chandrasekhara
- Charakterystyczne krzywe zmian blasku: w maksimum linie od tlenu po wapń (z zewnętrznych powłok), później—cięższe pierwiastki (nikiel, kobalt, żelazo) z jądra
- Uniwersalny kształt krzywych zmian blasku → świece standardowe
- Każda SN Ia wybucha z takiego samego białego karła → jasność absolutna w maksimum taka sama

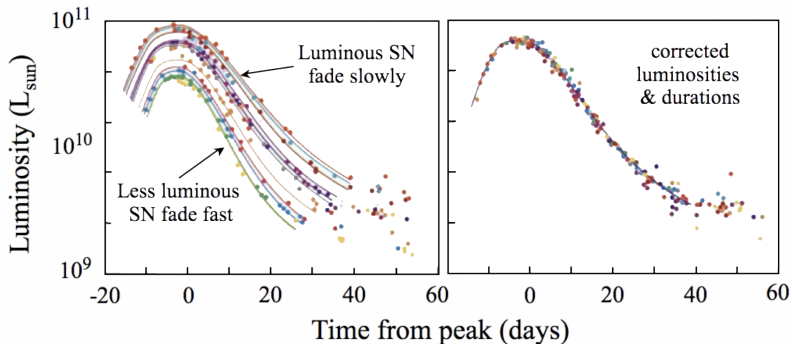
Supernowe typu Ia (SN Ia)

- Brak linii widmowych wodoru i helu
- Powstają z białych karłów, gdy te—z powodu akrecji materii od towarzysza—przekraczają granicę Chandrasekhara
- Charakterystyczne krzywe zmian blasku: w maksimum linie od tlenu po wapń (z zewnętrznych powłok), później—cięższe pierwiastki (nikiel, kobalt, żelazo) z jądra
- Uniwersalny kształt krzywych zmian blasku → świece standardowe
- Każda SN Ia wybucha z takiego samego białego karła → jasność absolutna w maksimum taka sama

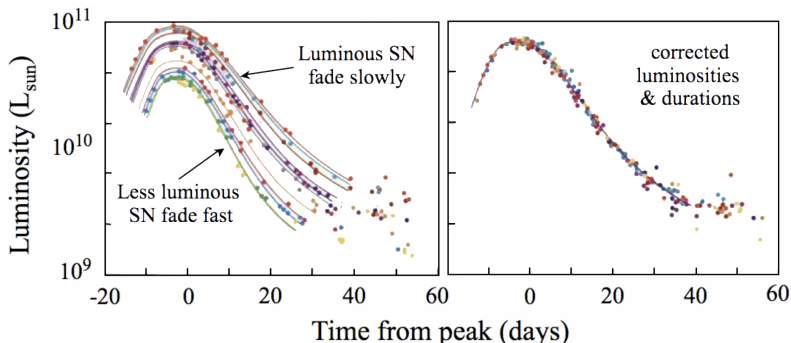
Supernowe typu Ia (SN Ia)

- Brak linii widmowych wodoru i helu
- Powstają z białych karłów, gdy te—z powodu akrecji materii od towarzysza—przekraczają granicę Chandrasekhara
- Charakterystyczne krzywe zmian blasku: w maksimum linie od tlenu po wapń (z zewnętrznych powłok), później—cięższe pierwiastki (nikiel, kobalt, żelazo) z jądra
- Uniwersalny kształt krzywych zmian blasku → świece standardowe
- Każda SN Ia wybucha z takiego samego białego karła → jasność absolutna w maksimum taka sama

Krzywe zmian blasku SN Ia



Krzywe zmian blasku SN Ia



Empiryczna funkcja opisująca kształt obserwowanej krzywej zmian blasku:

$$L_{\text{obs}}(t) = A \times (t - t_0)^\eta \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right) + C \quad (10)$$

osiąga maksimum o wartości $L_{\text{obs}}(t_p) = A \times (\eta\tau)^\eta \exp(-\eta) + C$
w chwili $t_p = t_0 + \eta\tau$.

Krzywe zmian blasku SN Ia

Jasność absolutna $L_{\text{int}}(t)$ z obserwowaną $L_{\text{obs}}(t)$ są związane zależnością

$$L_{\text{obs}}(t) = \frac{L_{\text{int}}(t)}{4\pi d^2} \quad (11)$$

gdzie d jest odległością do supernowej.

⁵Phillips, ApJL 413, L105 (1993)

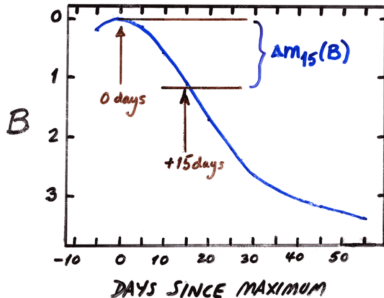
Krzywe zmian blasku SN Ia

Jasność absolutna $L_{\text{int}}(t)$ z obserwowaną $L_{\text{obs}}(t)$ są związane zależnością

$$L_{\text{obs}}(t) = \frac{L_{\text{int}}(t)}{4\pi d^2} \quad (11)$$

gdzie d jest odległością do supernowej.

Istnieje liniowy związek między jasnością w pikie oraz tempem spadku jasności w czasie późniejszym; wyrażony jest poprzez zależność Phillipsa⁵ łączącą magnitudo w paśmie B w pikie, $M_{\text{max}}(B)$, a magnitudo 15 dni później, $\Delta m_{15}(B)$:



⁵Phillips, ApJL 413, L105 (1993)

Współcześnie, w praktyce korzysta się ze zbioru unormowanych krzywych zmian blasku SNe Ia, do których przyrównuje się badaną supernową celem oszacowania odległości do niej. Jako, że SNe Ia są do siebie podobne, ale nie identyczne, istnieje pewna wariancja w kształtach ich krzywych zmian blasku. Stosowanie zbioru wzorcowych supernowych pozwala wziąć tę wariancję pod uwagę.

Współcześnie, w praktyce korzysta się ze zbioru unormowanych krzywych zmian blasku SNe Ia, do których przyrównuje się badaną supernową celem oszacowania odległości do niej. Jako, że SNe Ia są do siebie podobne, ale nie identyczne, istnieje pewna wariancja w kształtach ich krzywych zmian blasku. Stosowanie zbioru wzorcowych supernowych pozwala wziąć tę wariancję pod uwagę.

W zasadzie jednak znając odległość d_1 do jednej supernowej, SN_1 , można oszacować odległość d_2 do innej, SN_2 , stosując podobne rozumowanie.

Krzywe zmian blasku SN Ia

Niech będą dane dwie krzywe zmian blasku, dla SN_1 i SN_2 . Do obu dopasowujemy funkcję $L_{\text{obs},i}(t)$, uzyskując parametry A_i , $t_{0,i}$, η_i , τ_i , C_i . Dodatkowo, znamy odległości d_i do obu SN_i , dla których liczymy $\Delta m_{15,i}$.

Krzywe zmian blasku SN Ia

Niech będą dane dwie krzywe zmian blasku, dla SN_1 i SN_2 . Do obu dopasowujemy funkcję $L_{\text{obs},i}(t)$, uzyskując parametry A_i , $t_{0,i}$, η_i , τ_i , C_i . Dodatkowo, znamy odległości d_i do obu SN_i , dla których liczymy $\Delta m_{15,i}$. Następnie, skoro znamy d_i , możemy wyznaczyć jasność absolutną (w skali magnitudo):

$$M_i = m_i - 5 \log \frac{d_i}{10 \text{ pc}} \quad (12)$$

Krzywe zmian blasku SN Ia

Niech będą dane dwie krzywe zmian blasku, dla SN_1 i SN_2 . Do obu dopasowujemy funkcję $L_{\text{obs},i}(t)$, uzyskując parametry A_i , $t_{0,i}$, η_i , τ_i , C_i . Dodatkowo, znamy odległości d_i do obu SN_i , dla których liczymy $\Delta m_{15,i}$. Następnie, skoro znamy d_i , możemy wyznaczyć jasność absolutną (w skali magnitudo):

$$M_i = m_i - 5 \log \frac{d_i}{10 \text{ pc}} \quad (12)$$

Zależność Phillipsa przyjmuje postać

$$M_i = M_0 + a \Delta m_{15,i} \quad (13)$$

Krzywe zmian blasku SN Ia

Niech będą dane dwie krzywe zmian blasku, dla SN_1 i SN_2 . Do obu dopasowujemy funkcję $L_{\text{obs},i}(t)$, uzyskując parametry A_i , $t_{0,i}$, η_i , τ_i , C_i . Dodatkowo, znamy odległości d_i do obu SN_i , dla których liczymy $\Delta m_{15,i}$. Następnie, skoro znamy d_i , możemy wyznaczyć jasność absolutną (w skali magnitudo):

$$M_i = m_i - 5 \log \frac{d_i}{10 \text{ pc}} \quad (12)$$

Zależność Phillipsa przyjmuje postać

$$M_i = M_0 + a \Delta m_{15,i} \quad (13)$$

Mamy układ dwóch równań ($i = 1, 2$) na niewiadome M_0 i a . Jego rozwiązanie to

$$a = \frac{M_1 - M_2}{\Delta m_{15,1} - \Delta m_{15,2}}$$
$$M_0 = \frac{M_2 \Delta m_{15,1} - M_1 \Delta m_{15,2}}{\Delta m_{15,1} - \Delta m_{15,2}}$$

Krzywe zmian blasku SN Ia

Tak uzyskana zależność Phillipsa jest dopasowaniem funkcji liniowej do zaledwie dwóch punktów, zatem nie zawiera informacji nt. wariancji populacji—dlatego stosuje się kalibrację na większej liczbie supernowych.⁶

⁶Guy et al., A&A 466, 11 (2007)

Tak uzyskana zależność Phillipsa jest dopasowaniem funkcji liniowej do zaledwie dwóch punktów, zatem nie zawiera informacji nt. wariancji populacji—dlatego stosuje się kalibrację na większej liczbie supernowych.⁶

Mając wyznaczone a i M_0 można oszacować nieznaną odległość d_3 do SN₃, dla której uzyskano dopasowanie funkcją $L_{\text{obs},3}(t)$, z której uzyskujemy wartości m_3 oraz $\Delta m_{15,3}$:

⁶Guy et al., A&A 466, 11 (2007)

Krzywe zmian blasku SN Ia

Tak uzyskana zależność Phillipsa jest dopasowaniem funkcji liniowej do zaledwie dwóch punktów, zatem nie zawiera informacji nt. wariancji populacji—dlatego stosuje się kalibrację na większej liczbie supernowych.⁶

Mając wyznaczone a i M_0 można oszacować nieznaną odległość d_3 do SN₃, dla której uzyskano dopasowanie funkcją $L_{\text{obs},3}(t)$, z której uzyskujemy wartości m_3 oraz $\Delta m_{15,3}$:

po prostu liczymy $M_3 = M_0 + a\Delta m_{15,3}$, skąd następnie wyznaczamy moduł odległości $\mu_3 = m_3 - M_3$ oraz ostatecznie odległość

$$d_3 = 10^{1+\mu_3/5} \text{ pc} \quad (14)$$

⁶Guy et al., A&A 466, 11 (2007)

Ale jednak da się oszacować odległość d_2 znając wyłącznie d_1 :
ponieważ $L_{\text{obs}}(t)$ i $L_{\text{int}}(t)$ są przeskalowaniem o czynnik stały ($= 4\pi d^2$) dla danej supernowej, to osiągają maksima lokalne dla tych samych argumentów t_p . Zatem

$$L_{\text{obs,max}} = A \times (\eta\tau)^\eta \exp(-\eta) + C = \frac{L_{\text{int,max}}}{4\pi d^2} \quad (15)$$

Krzywe zmian blasku SN Ia

Ale jednak da się oszacować odległość d_2 znając wyłącznie d_1 :
ponieważ $L_{\text{obs}}(t)$ i $L_{\text{int}}(t)$ są przeskalowaniem o czynnik stały ($= 4\pi d^2$) dla danej supernowej, to osiągają maksima lokalne dla tych samych argumentów t_p . Zatem

$$L_{\text{obs,max}} = A \times (\eta\tau)^\eta \exp(-\eta) + C = \frac{L_{\text{int,max}}}{4\pi d^2} \quad (15)$$

Zakładamy teraz istnienie zależności typu Philiipsa, tj. której znaczenie jest takie, że pik jasności absolutnej zależy wyłącznie od kształtu krzywej zmian blasku, oraz że wszystkie SNe Ia są do siebie podobne (świece standardowe), tj. mają podobne jasności absolutne w pik:

$$L_{\text{int,max},1} = L_{\text{int,max},2}$$

Krzywe zmian blasku SN Ia

$$L_{\text{int,max},1} = L_{\text{int,max},2}$$

Mozemy zatem napisać, że $4\pi d_1^2 L_{\text{obs,max},1} = 4\pi d_2^2 L_{\text{obs,max},2}$.

$$L_{\text{int,max},1} = L_{\text{int,max},2}$$

Możemy zatem napisać, że $4\pi d_1^2 L_{\text{obs,max},1} = 4\pi d_2^2 L_{\text{obs,max},2}$. Stąd zatem:

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{L_{\text{obs,max},2}}{L_{\text{obs,max},1}} \quad (16)$$

$$L_{\text{int,max},1} = L_{\text{int,max},2}$$

Możemy zatem napisać, że $4\pi d_1^2 L_{\text{obs,max},1} = 4\pi d_2^2 L_{\text{obs,max},2}$. Stąd zatem:

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{L_{\text{obs,max},2}}{L_{\text{obs,max},1}} \quad (16)$$

tj.

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{A_2 \times (\eta_2 \tau_2)^{\eta_2} \exp(-\eta_2) + C_2}{A_1 \times (\eta_1 \tau_1)^{\eta_1} \exp(-\eta_1) + C_1} \quad (17)$$

skąd ostatecznie

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{A_1 \times (\eta_1 \tau_1)^{\eta_1} \exp(-\eta_1) + C_1}{A_2 \times (\eta_2 \tau_2)^{\eta_2} \exp(-\eta_2) + C_2}} \quad (18)$$

Zadanie 13

Dopasować równ. (10) do krzywych zmian blasku dwóch supernowych (SN_1 oraz SN_2). Podać wartości parametrów A_i , $t_{0,i}$, η_i , τ_i , C_i wraz z niepewnościami. Wykonać odpowiedni(e) wykres(y) ilustrujący(e) wynik(i). Wiedząc, że odległość do SN_1 (którą jest SN 1998aq) wynosi $d_1 = 21.58 \pm 0.07$ Mpc, obliczyć [równ. (18)] odległość d_2 do SN_2 .